

Mathématiques et Vérité : Fondements, Démonstration et Statut Épistémologique

Par Cyprien Bwangila Ibula sj, PhD

Docteur en Philosophie (Université Paris Sorbonne – Paris IV)

Master en Théologie (Sankt Georgen, Frankfurt-am-Main, Allemagne).

Secrétaire général académique et Professeur

à l'Université Loyola du Congo,

Professeur à L'Université Catholique du Congo (UCC),

Et à l'Université Pédagogique nationale (UPN).

Cet article explore la question de la vérité en mathématiques sous un angle philosophique et épistémologique. Il examine leurs fondements, leur rapport aux sciences et les critères de vérité, notamment la démonstration. En confrontant diverses conceptions philosophiques, il met en lumière les tensions entre réalisme et constructivisme tout en interrogeant le statut des mathématiques et leur prétention à une vérité universelle et nécessaire.

Introduction

Dans cet article, nous nous proposons d'examiner la question de la vérité en mathématiques. Bien que, dans l'usage courant, le terme « mathématiques » soit employé au pluriel, il convient de rappeler qu'historiquement, il était utilisé au singulier. Selon Ian Hacking, cette transition vers le pluriel s'est généralisée au XVe siècle. Certains penseurs, tels qu'Auguste Comte et d'autres auteurs modernes désireux de restaurer une vision unifiée des mathématiques, ont tenté de revenir à l'usage du singulier, mais sans succès. Ce simple constat révèle déjà un paradoxe : les mathématiques ne semblent pas exister en tant que réalité naturelle, et pourtant, elles s'imposent comme un instrument indispensable au développement des sciences de la nature. L'histoire des sciences montre que leurs progrès reposent largement sur l'élaboration de nouvelles théories mathématiques.

Dès lors, plusieurs questions fondamentales se posent : d'où proviennent ces concepts mathématiques qui ne semblent pas avoir d'existence tangible ? Quelle est la nature de la vérité mathématique ? Peut-on la considérer comme nécessaire, éternelle, universelle donc démontrable à tous et connaissable par tous en principe ? Cette réflexion nous conduira à interroger la nature même des mathématiques, leur rapport à la vérité et les différentes approches philosophiques qui s'y rattachent.

Afin d'apporter des éléments de réponse à ces interrogations, nous procéderons par étapes. Nous commencerons par une réflexion sur la nature

même des mathématiques et leur statut épistémologique, en confrontant différentes approches philosophiques (platonisme, intuitionnisme, formalisme, etc.). Nous analyserons ensuite les critères permettant d'établir la vérité mathématique, en insistant notamment sur le rôle central de la démonstration. Enfin, nous examinerons les implications de cette conception de la vérité en mathématiques sur le statut même des énoncés mathématiques et leur rapport aux autres types de vérités, notamment scientifiques et philosophiques.

1. Mathématiques et philosophie des mathématiques

Admettant la diversité des pratiques mathématiques, nous considérons avec Alistair Cameron Crombie¹ que les mathématiques sont l'ensemble des sciences qui ont pour objet la quantité et l'ordre, l'étude du nombre, de la figure et de la fonction. Une telle précision peut sembler superflue dans un contexte ordinaire, où l'évidence de cette définition ne fait guère débat. Toutefois, dans le cadre d'un travail de philosophie, elle devient nécessaire, notamment face aux positions de certains philosophes des sciences, en particulier ceux issus du courant analytique, qui tendent à distinguer les mathématiques des sciences proprement dites. Pour ces penseurs, le terme *science* renvoie avant tout aux sciences de la nature, aux sciences empiriques ou encore aux sciences expérimentales, excluant ainsi les mathématiques de ce champ.

L'exclusion des mathématiques du domaine des sciences repose sur l'existence de questionnements philosophiques spécifiques. En effet, les philosophes, experts en distinctions conceptuelles, ont souvent abordé cette discipline sous un angle particulier. Kant, par exemple, traite des mathématiques dans *l'Esthétique transcendantale*, tandis qu'il aborde la science de Galilée et de Newton dans *l'Analytique transcendantale*. Du Moyen Âge jusqu'à Descartes et Leibniz, les mathématiques ont souvent été considérées comme un domaine de vérités éternelles. Pourtant, il semble plus pertinent de les classer parmi les sciences, en particulier parmi les sciences formelles.

Avec Henri Poincaré se pose la question si l'élément rationnel en mathématiques ne peut se réduire qu'à une description formelle de son objet. En fait, on oppose souvent deux thèses sur les fondements des mathématiques : l'une présuppose que la structure des mathématiques est fixée in-

1 Alistair Cameron Crombie est un grand historien des sciences, ancien élève d'Alexandre KOYRE. Il a consacré des dizaines d'années à un livre en trois volumes publiés en 1914 peu avant sa mort chez Duckworth, à Londres. Le titre en est « *Styles of scientific thinking in the European tradition* ». Crombie soutient que six styles distincts de pensée se sont développés à des époques différentes et tiennent depuis un rôle majeur dans la science moderne. Bref, ce sont la postulation mathématique, l'exploration expérimentale, la modélisation hypothétique, la classification taxinomique, l'analyse et la dérivation historico-génétique.

dépendamment de l'expérience sensible et de l'intuition intellectuelle. Les mathématiques se réduisent alors ou bien à une forme transcendante ou bien à la logique. Cette première voie est soutenue par la tendance d'une tradition « aristotélicothomiste ». Elle prend la forme du platonisme ou du formalisme. A l'opposé sont placées les théories qui conçoivent les mathématiques et la logique ou bien comme un processus d'abstraction et de construction à partir des données sensibles ou bien comme processus de construction de formes subjectives. Cette deuxième voie correspond à la tendance de tradition intuitionniste.

L'intuition est donc considérée comme une représentation sensible (Kant), une représentation combinatoire-empirique (Curry) ou comme une capacité intellectuelle (Brouwer et partiellement Poincaré).

Poincaré, d'emblée anti-logiciste et anti-formaliste, s'aperçoit dans son ébauche philosophique des fondements des mathématiques que les démarches méthodiques de la construction et de l'analyse descriptive doivent se suivre dans cet ordre même (construction-analyse) et que l'analyse ne consiste plus dans l'inversion traditionnelle de la synthèse mais qu'elle concerne le passage d'un niveau « intuitif » d'accès aux objets à un niveau d'accès « abstrait » (symbolique).

Tout en restant intuitionniste, la pensée philosophique de Poincaré intègre les éléments de formalisation. Toutefois, il faut dire que Poincaré développe tour à tour le conventionnalisme en géométrie avec une extension affaiblie en physique, un semi-intuitionnisme en logique et en arithmétique ainsi qu'un prédicativisme en théorie des ensembles. Mais c'est peut-être l'occasionnalisme qui unit la pensée philosophique de Poincaré. Il se manifeste par une hiérarchie où les conventions géométriques et les principes physiques suivent l'arithmétique « aprioriste » et précèdent les lois physiques empiriques.

Le principal critère permettant d'établir une vérité mathématique est la démonstration. Il y a cinquante ans, le philosophe américain Paul Benacerraf soulignait, dans son article « La vérité mathématique »², une tension majeure en philosophie des mathématiques : certains philosophes peuvent expliquer comment nous acquérons des connaissances mathématiques, mais non ce sur quoi elles portent ; d'autres, en revanche, définissent l'objet même des mathématiques, mais échouent à justifier comment nous pouvons le connaître. Ainsi, les platoniciens soutiennent que les mathématiques concernent des objets abstraits, comme les nombres, et défendent une conception aristotélicienne de la vérité mathématique.³ Toutefois,

2 Paul Benacerraf, « Mathematical Truth » *Journal of philosophy*, 1971

3 Ian Hacking, « Vrai », les valeurs et les sciences, *Actes de Recherche en Sciences Sociales*,

cette approche soulève un problème fondamental : comment connaître ces objets qui, par nature, échappent à l'expérience ?

À l'opposé, les théoriciens de la preuve – regroupant notamment les formalistes et les logicistes – expliquent le processus d'acquisition des connaissances mathématiques par la démonstration. Cependant, ils ne précisent pas le lien exact entre démonstration et vérité. Ce dilemme, mis en évidence par Benacerraf, oppose donc deux perspectives incomplètes : les platoniciens manquent d'une théorie de la connaissance mathématique, tandis que les théoriciens de la preuve n'offrent pas de véritable théorie de la vérité mathématique. Dans cette même optique, Denis Bonnay et Jacques Dubucs soulignent l'absence de consensus parmi les philosophes des mathématiques. Certains considèrent que cette discipline étudie un ensemble d'objets indépendants de notre esprit, à l'image des objets physiques, tandis que d'autres y voient une connaissance purement intellectuelle ou intuitive. D'autres encore refusent d'en faire une sphère autonome et l'intègrent à l'ensemble du savoir scientifique.

Face à ces divergences, il semble possible de dépasser le dilemme en articulant deux problématiques essentielles : la question ontologique, qui interroge la nature même des objets mathématiques, et la question épistémologique, qui s'intéresse aux conditions de possibilité de la connaissance mathématique.

Le dilemme soulevé par Paul Benacerraf repose sur une opposition entre deux perspectives incomplètes : d'un côté, les platoniciens disposent d'une conception ontologique des mathématiques, mais manquent d'une véritable théorie de la connaissance mathématique ; de l'autre, les théoriciens de la preuve expliquent comment nous connaissons les mathématiques, mais sans fournir une véritable théorie de leur vérité. Denis Bonnay et Jacques Dubucs, allant dans le même sens, affirment que « les philosophes des mathématiques ne sont d'accord sur à peu près rien. Certains considèrent que les mathématiques étudient bien un domaine d'objets existant indépendamment de nous et qu'il y a des objets mathématiques comme il y a des objets physiques ; même s'il ne s'agit pas du même genre d'objets »⁴. En outre, « d'autres considèrent que la connaissance mathématique est une connaissance *sui generis*, de nature purement intellectuelle. D'autres pensent qu'il s'agit bien d'une connaissance *sui generis*, mais qu'elle repose sur une forme d'intuition. D'autres encore refusent de

2022/2-141, p. 18

4 Dennis Bonnay et Jacques Dubucs, « Philosophie de mathématiques », in Anouk Barberousse, Denis Bonnay et Mikaël Cozic (sous la direction de), *Précis de philosophie des sciences*, Paris, Vuibert, p. 293

lui accorder une place et ne veulent parler de connaissance mathématique qu'intégrée à la totalité de l'édifice de la science. »⁵

Comment, alors, dépasser ce dilemme ? Une approche possible consiste à articuler la question ontologique (de quoi les mathématiques sont-elles l'étude ?) avec la question épistémologique (comment la connaissance mathématique est-elle possible ?). Une position nuancée permettrait ainsi de concilier les deux courants opposés. Les platoniciens ont sans doute raison d'affirmer l'existence d'objets mathématiques, mais les constructivistes ne sont pas en reste : ces objets ne sont pas simplement découverts, mais révélés à travers la démonstration. Toutefois, ce processus ne repose pas uniquement sur des démonstrations individuelles, mais sur un style de raisonnement structurant qui engendre progressivement de nouveaux domaines mathématiques dits *abstrait*s.

Dans cette perspective, la question de l'auto-justification des mathématiques prend tout son sens. Parmi les contributions majeures du XXe siècle sur ce sujet, *Preuves et réfutations* d'Imre Lakatos (1976) considère les mathématiques comme une science parmi d'autres, évoluant par un processus d'essais et de corrections successives. Wittgenstein, quant à lui, propose une approche originale dans ses *Remarques sur les fondements des mathématiques*, où il met en avant le rôle central de la démonstration dans la construction du sens mathématique. Ainsi, en s'appuyant sur ces différentes perspectives, on peut considérer que les mathématiques se définissent autant par leur contenu que par leur méthode démonstrative, qui les rend analytiques au sens leibnizien du terme.

2. De la vérité en général

La vérité est une notion à la structure complexe, sujette à de nombreuses interrogations philosophiques. Malgré les critiques des sceptiques, des relativistes et des postmodernistes, elle demeure une valeur centrale dans la culture moderne et joue un rôle fondamental dans l'évaluation de la connaissance et des sciences. Le philosophe oxonien J.L. Austin illustre cette prégnance avec ironie : « *In vino, peut-être, veritas, mais dans un colloque de philosophie tout à fait sobre, verum.* » Cette remarque souligne l'importance accordée à la vérité, bien qu'elle soit difficile à définir avec précision. Depuis Aristote, toute tentative de définition semble se confondre avec celle du terme *vrai*. Aristote lui-même affirmait : « Dire que ce qui est, est, et que ce qui n'est pas, n'est pas, c'est le vrai. »

Ainsi, Aristote et Austin s'accordent sur le fait que la vérité est avant tout liée au langage et à nos énoncés. Aristote est généralement associé à la

5 Ibid, p. 293-294

conception de la vérité comme *adéquation* entre le discours et la réalité, une idée qui a perduré à travers les siècles et que l'on retrouve chez Austin sous une forme modernisée : la vérité comme correspondance aux faits.

Martin Heidegger⁶, quant à lui, synthétise l'évolution de cette notion dans la tradition philosophique. Selon lui, la vérité oscille entre deux pôles : l'énoncé (ce qui est dit) et le jugement (ce qui est pensé). Inspiré de Kant, Heidegger distingue plusieurs points essentiels :

1. La vérité réside dans l'énoncé ou le jugement ;
2. Son essence repose sur l'accord entre le jugement et son objet ;
3. Aristote, considéré comme le père de la logique, aurait défini la vérité en ces termes et popularisé cette conception de l'*accord*.

Toutefois, une question fondamentale demeure : à quoi exactement s'applique le prédicat de vérité ? Est-il lié exclusivement aux énoncés, aux jugements ou encore aux faits eux-mêmes ? Cette interrogation continue d'animer les débats philosophiques autour de la nature même de la vérité.

Pour Descartes et toute la philosophie moderne à ses débuts, ce sont les idées qui sont vraies et elles sont vraies quand elles sont des représentations adéquates de leur projet. Pour Kant, en revanche ce qui est vrai, ce sont les jugements. Au vingtième siècle, avec l'essor du tournant linguistique, ce sont les phrases, les énoncés, les propositions qui sont vraies. C'est peut-être l'approche la plus fidèle à Aristote. Mais, que le principal prétendant à la vérité soit une pensée, une idée, un jugement ou un énoncé, pour beaucoup de philosophies traditionnelles, ce qui est vrai est ce qui est pensé ou dit, et c'est vrai lorsque cela est en adéquation ou en correspondance avec l'objet dont il est question.

Le vrai se distingue du réel et du juste : le réel désigne les choses qui existent. Il s'oppose à l'irréel. Le vrai concerne nos énoncés qui traitent des choses qui existent : il s'oppose au faux. Enfin, le juste qualifie nos énoncés portant sur ce qui doit être. Il s'oppose à l'injuste. Traditionnellement, on distingue trois principales conceptions de la vérité. D'abord, la vérité comme correspondance entre un énoncé et une réalité extralinguistique, c'est la vérité correspondance, appelée encore vérité factuelle. C'est la définition de la vérité qui domine dans les sciences empiriques. Ensuite, la vérité comme cohérence. Il s'agit de la vérité cohérence ou vérité formelle ; elle ne fait pas de référence à une réalité extralinguistique. En effet, une théorie est vraie si elle est exempte de contradiction logique, c'est-à-dire si aucun de ces énoncés (lois, modèle, faits prédits) n'en contredit un autre. C'est la définition de la vérité employée dans le cadre des sciences for-

6 Martin Heidegger, *Etre et Temps* ; Trad par Emmanuel Martineau : Authentica, 1985

nelles, en l'occurrence les mathématiques et la logique. Enfin, il y a la vérité comme consensus. Une proposition en sa faveur est que le consensus, s'il existe, doit s'être imposé pour de bonnes raisons. Cette définition n'est toutefois pas reconnue comme acceptable par une très grande majorité des scientifiques car la notion de consensus est très vague et difficile à vérifier.

3. A quel type les mathématiques peuvent-elles prétendre ?

Avant la Grèce de Thalès, des savoirs « mathématiques » existaient déjà, bien antérieurs. Les Égyptiens et les Mésopotamiens possédaient des connaissances avancées en arithmétique et en géométrie. Même avant l'invention de l'écriture, à l'époque préhistorique, les premiers humains savaient compter et distinguer des formes géométriques comme les triangles, losanges cercle.⁷ Les Égyptiens et les Mésopotamiens maîtrisaient déjà les quatre opérations fondamentales : addition, soustraction, multiplication et division. Ils utilisaient des signes graphiques pour représenter les nombres entiers, ainsi que des fractions.

De plus, ils avaient un vocabulaire précis pour désigner diverses figures géométriques, en mesurant sommets, côtés, longueurs, superficies et les volumes.⁸ Ainsi, les mathématiques, à cette époque, étaient principalement axées sur le calcul. Ce n'est qu'avec les Grecs, et particulièrement avec Thalès de Milet en Ionie, que les mathématiques se sont centrées sur la notion de démonstration (ou preuve), qui est devenue la caractéristique essentielle de la discipline.

Cependant, le calcul reste indispensable dans l'apprentissage des mathématiques et la résolution de problèmes quotidiens. Ainsi, on peut dire que le calcul et la démonstration sont les deux piliers des mathématiques. Quand on parle de vérité en mathématiques, c'est principalement la démonstration qui est en jeu. C'est pourquoi les historiens des mathématiques considèrent Thalès de Milet comme le père fondateur des mathématiques modernes. La « vérité du triangle » que Thalès a découverte, ainsi que toutes les vérités similaires accumulées par les géomètres et astronomes jusqu'à l'époque de Platon, sont des vérités imposées par le raisonnement plutôt que par l'observation ou le témoignage.⁹

C'est ainsi qu'il convient de comprendre pourquoi Descartes et les mathématiciens platoniciens attribuent un caractère particulier aux vérités mathématiques. Pendant des siècles, les mathématiques seront considérées

7 Jean Baudet, *Mathématique et vérité. Une philosophie du nombre*, Paris, L'Harmattan, 2005, p.15

8 Jean Baudet. Op cit., p.16

9 JC Baudet, Op. cit., p 32

comme le domaine par excellence de la vérité. Euclide, avec son ouvrage *Les Éléments*, a été le premier à formaliser la géométrie. À sa suite, les mathématiciens ont construit leurs théories en suivant des règles logiques et déductives unanimement acceptées, conférant ainsi aux mathématiques un statut de vérité absolue. En effet, les mathématiques apportent la preuve de chaque proposition qu'elles avancent, et la solution d'un problème est toujours unique et définitive, quelle que soit sa complexité.

Pour aborder la question qui nous intéresse, il semble pertinent de la reformuler ainsi : *A quel type de vérité appartiennent les énoncés mathématiques ?* Cette question est profondément philosophique. Deux réponses négatives peuvent déjà être apportées à ce stade : d'une part, les mathématiques ne relèvent pas de la vérité matérielle, de type empirique ; d'autre part, en tant que discipline, elles ne sont pas non plus une vérité formelle, comme celle de la calculabilité. Cependant, une certitude demeure : la question soulève au moins un problème ouvert, voire un problème indécidable. Nous allons maintenant examiner comment, à travers les différentes étapes de l'histoire de la philosophie occidentale, on a cherché à répondre à la question de la vérité des mathématiques.

Démonstration et preuve

Crombie parle de « démonstration », mais le terme « preuve » peut également être utilisé, et dans de nombreux cas, les deux mots se rapprochent. Le mot « démonstration » semble cependant plus formel : il désigne un raisonnement qui établit la vérité d'une proposition par un processus logico-déductif, à partir de prémisses soit démontrées, soit considérées comme évidentes. De plus en plus, dans le domaine de la philosophie des mathématiques, on utilise le terme « preuve » dans ce sens précis. On parle ainsi de la « théorie des preuves », qui est une branche de la logique mathématique. Cette évolution modeste du langage a probablement été influencée par l'analogie avec l'anglais *proof* et la branche de la logique et des mathématiques appelée *proof theory*. En français, on rencontre encore l'expression « théorie des démonstrations » dans des ouvrages de référence comme l'Encyclopédie Universalis, mais dans les travaux des logiciens, on parle plutôt de « théorie des preuves ». Par exemple, Jean-Yves Girard, un chercheur éminent dans ce domaine, intitule son article dans l'Encyclopédie Universalis « Théories des démonstrations », mais dans ses publications scientifiques, il parle toujours de la « théorie des preuves ».

Venons-en à une autre manière d'utiliser le mot « preuve ». Selon une tradition qui remonte à l'Antiquité, les mathématiciens cherchent à résoudre des problèmes : leur objectif est de démontrer la solution, c'est-à-dire de prouver un théorème. Aujourd'hui, et particulièrement à Paris, beaucoup de mathématiciens affirment que les grands mathématiciens ne

sont pas célèbres pour avoir simplement prouvé un théorème, mais pour avoir introduit de nouvelles idées mathématiques qui ont permis de développer de nouvelles méthodes de démonstration. Ces idées nouvelles sont souvent utilisées dans les démonstrations, pour résoudre une variété de problèmes ouverts ou pour explorer plus profondément des structures déjà connues. Dans ce contexte, on ne parle pas de la démonstration d'un théorème particulier, ni de l'idée qui sous-tend cette démonstration, mais plutôt d'une idée permettant de réaliser des démonstrations. C'est dans ce cas que les mathématiciens préfèrent utiliser le terme « preuve ». J'apprécie beaucoup cette façon de voir les choses, cette notion de la découverte de l'idée d'une preuve, ou simplement de l'idée de preuve. De nombreuses démonstrations, concernant une variété de théorèmes, peuvent utiliser la même idée-de-preuve. La diversité des applications de cette idée-de-preuve mesure la richesse de l'idée elle-même, et donc la grandeur de celui qui l'a découverte.

Des énoncés mathématiques

Chaque style introduit de nouveaux types d'objets, mais aussi de nouvelles sortes de propositions. Pour illustrer cela, commençons par une version positiviste de cette idée, formulée de manière claire par C.G. Hempel. Selon lui, il faut faire une distinction entre la proposition arithmétique appliquée, qui concerne des ensembles d'objets concrets. Par exemple, si j'ai deux pièces d'un euro dans ma main gauche et trois pièces dans ma main droite, puis que je les pose sur la table, cela donne cinq pièces : deux plus trois font cinq. Ce genre de relation s'applique bien aux objets comme les pièces. En revanche, ce raisonnement ne s'applique pas de la même manière aux lapins. Si j'ai deux lapins mâles dans une cage et trois lapines dans une autre, et que je les mets ensemble dans le jardin, après quelques jours, il y aura 37 lapins. Les euros se comportent différemment des lapins, et c'est un fait empirique. À la laverie automatique, une machine peut échanger un billet de 5 euros contre cinq pièces d'un euro. Il serait facile de construire une machine qui rende un billet de 5 euros pour mes 2 euros dans ma main gauche plus mes 3 euros dans ma main droite. Voici des exemples d'addition empirique où deux et trois font cinq, en général, mais pas toujours.

Hempel soutient qu'il existe une proposition d'addition empirique distincte de l'addition arithmétique pure. La distinction qu'il fait ne dépend pas de l'usage quotidien des mots exprimant les idées mathématiques. En général, nous ne faisons pas de distinction entre l'énoncé arithmétique « $2+3=5$ » et l'énoncé qui concerne des ensembles d'objets, comme des pièces, des lapins ou des pommes. Pour éviter toute ambiguïté, il convient de reformuler cette proposition sous forme de conditionnelle : si l'ensemble A

contient 2 éléments, si l'ensemble B en contient 3, et si A et B sont mutuellement exclusifs, alors l'ensemble de A et B ensemble contient 5 éléments. Cette proposition est vraie même pour des ensembles de lapins, mais elle ne dit rien sur la réalité des 5 lapins dans le jardin.

De même, Hempel distingue la géométrie des propositions portant sur des objets matériels. Cette approche positiviste peut être formulée en termes de phrases. La phrase « 2 et 3 font 5 » peut être ambiguë, car elle peut signifier deux propositions : l'addition empirique ou l'énoncé arithmétique. La même ambiguïté existe pour l'énoncé « tous les points d'une sphère sont équidistants du centre ». Cela peut être vrai pour la sphère géométrique, mais pas dans le même sens lorsqu'il s'agit d'une sphère gyroskopique. Il existe donc une question concernant l'application des mathématiques de la sphère à la sphère de quartz dans le satellite utilisé comme gyroscope.

Bien que Hempel exprime cette idée en termes de mots et de phrases, cette distinction remonte à l'Antiquité. Proclus, un philosophe néo-platonicien, l'avait déjà exprimée vers l'an 450, en affirmant que les sphères géométriques n'étaient pas les mêmes que les billes ou autres sphères empiriques. Il avait également précisé que les énoncés concernant les sphères géométriques sont d'une nature différente de ceux portant sur des objets matériels comme des billes.

Au Moyen Âge, certains ont soutenu que les propositions mathématiques étaient éternelles. Je ne dis pas que cette croyance est fausse, mais je ne l'adopte pas non plus. Je la rejette, car les propositions arithmétiques ne font jamais référence au temps réel, mais je ne la nie pas non plus, car elle est dépourvue de sens. On ne réfute pas les propositions qui n'ont pas de sens. La question du temps, et donc de l'éternité, ne se pose pas ici. Les vérités mathématiques ne sont pas des vérités éternelles au sens des scolastiques, car elles ne concernent en rien le temps, qu'il soit fini ou éternel.

Dans cette perspective, le style mathématique a introduit de nouvelles propositions. Pour les platoniciens, ces propositions existent indépendamment du temps. Je reste neutre vis-à-vis de ces thèses, mais je souligne un fait incontestable : ces vérités ne peuvent être formulées que dans un contexte de pensée particulier, avec ses méthodes de raisonnement démonstratives. Toutefois, il est possible de faire des affirmations empiriques – comme l'addition de deux euros et trois euros dans la main – sans faire référence à un style de pensée scientifique. L'analyse de Proclus et de Hempel, qui distingue la proposition empirique de la proposition arithmétique, est donc essentielle. C'est fascinant de constater que le néo-platonicien et le positiviste soient d'accord sur ce point !

Vérité mathématique

Quand dit-on la vérité ? Les critères sont définis par une nouvelle conception de ce que signifie dire la vérité. En ce qui concerne les mathématiques, le critère est la démonstration. Dire la vérité en mathématiques, c'est dire quelque chose qui peut être démontré.

Cela ne constitue cependant pas un critère de la vérité elle-même. Selon notre point de vue, les conditions de la vérité sont formelles et dépourvues de contenu. Dans la version de Tarski, l'énoncé « deux fois deux font quatre » est vrai si et seulement si deux fois deux font quatre. Cette logique s'applique également aux énoncés plus complexes en topologie ou en calcul différentiel. L'énoncé « p » est vrai si et seulement si la proposition exprimée par « p » est vraie. Plusieurs philosophes, notamment Donald Davidson, ont soutenu que la formule de Tarski énonce les conditions dans lesquelles une affirmation est vraie. Cependant, ces conditions ne comportent aucun contenu substantiel.

Le constructionnisme en mathématiques

L'idée, quelque peu ironique, de l'autojustification des styles se distingue clairement des théories constructionnistes sur la découverte scientifique. Par exemple, l'idée de la construction sociale stipule que les faits sont construits en tant que tels au cours d'un processus de recherche et de négociation. Avant d'être construits, il n'y a pas de faits « préexistants » à découvrir. Ma position ne s'aligne pas avec ce type de doctrines, qui devraient être regroupées avec le platonisme, lequel attribue un temps aux choses qui n'ont pas de temps. Ce cours est l'occasion de rapprochements inattendus : Proclus flirte avec Hempel, le constructionnisme social s'associe au platonisme...

Il y a également le constructivisme mathématique, dont l'intuitionnisme de Brouwer, au début du vingtième siècle, représente une première forme. Selon cette perspective, une proposition n'est pas une vérité avant d'avoir été construite, et un objet mathématique n'existe que lorsqu'il a été construit. Ma position est neutre par rapport au constructivisme et à l'intuitionnisme. Si l'on insiste sur le sens intuitionniste de la démonstration, on pourrait dire exactement ce que j'ai avancé concernant le style de raisonnement en mathématiques, tout en adoptant le sens intuitionniste du mot « démonstration ».

Une autre méthode en mathématiques

Je pense qu'il existe une autre méthode de raisonnement fondamentale en mathématiques, que je préfère appeler combinatoire ou algorithmique, plutôt qu'algébrique. Elle trouve ses racines dans les études diophan-

tiennes et son histoire nous conduit notamment en Asie, en Inde, et surtout dans le monde arabe.

J'apprécie particulièrement le terme « algorithme » en raison de son lien avec les mythes d'origine. L'algèbre, conçue dans le monde arabe, a donné naissance à ce concept combinatoire qu'est l'algorithme, dont le nom est dérivé d'un mathématicien du Xe siècle, Al Khawarizmi. Résidant de la Maison de la Sagesse à Bagdad, il a joué un rôle essentiel dans la transmission de nombreux manuscrits scientifiques grecs. Son traité majeur est reconnu comme le premier manuel d'algèbre. Le terme « algèbre » lui-même provient du titre de son ouvrage *Hisab al jabr w'almuqabala*. Al Khawarizmi a également présenté de véritables algorithmes, notamment en expliquant une méthode pour calculer la racine carrée d'un nombre. Après les exploits des mathématiciens arabes, nous attribuons à François Viète (1540-1603) la fusion de la géométrie et de l'algèbre en Europe, suivie par la *Géométrie* de Descartes.

Ces exemples illustrent bien la nature évolutive et ouverte du concept de démonstration. C'est un concept vivant et dynamique. Parfois stable, il semble déterminé, mais lors des périodes de plus grande effervescence intellectuelle, il se révèle en pleine expansion. Ce processus se poursuit aujourd'hui et continuera dans le futur, par des chemins encore inconnus.

Le calcul ordinaire

Moins complexe que la géométrie ou l'algèbre, il y a le calcul, les opérations élémentaires sur les nombres : l'addition, la multiplication. La théorie des nombres, l'arithmétique, est élémentaire dans un sens. Pourtant, de nombreux problèmes restent sans solution. Par exemple, savons-nous que chaque nombre pair peut être exprimé comme la somme de deux nombres premiers ? Nous ne le savons pas. Il est également prouvé qu'il est impossible de créer un algorithme capable de décider de la vérité de chaque proposition élémentaire en théorie des nombres. Mais qu'en est-il des calculs simples, comme ceux des enfants ou des épiciers ? Un calcul rapide n'est pas une démonstration. Dire que $5+7$ font 12 n'est en réalité pas un calcul du tout. Par contre, diviser 471 par 9 est un véritable calcul. Après quelques instants, on obtient le résultat, $52 \frac{1}{3}$. C'est un vrai calcul, mais ce n'est pas une démonstration. C'est simplement un calcul, une opération mécanique.

Wittgenstein : une démonstration mathématique doit être synoptique

Wittgenstein a fait des observations intéressantes sur des démonstrations de ce type. En règle générale, j'aurai en tête le genre de démonstrations que Wittgenstein qualifie de *übersichtlich*, souvent traduit par « synoptique ». Il utilise également le terme *übersehbar*, qui désigne quelque chose que l'on peut saisir d'un coup d'œil, ce qui se prête à une vision

synoptique. Dans une de ses réflexions sur les fondements des mathématiques, il a employé les guillemets pour attirer l'attention sur une idée qu'il considérait comme essentielle pour comprendre la phénoménologie des démonstrations.

Ce qu'apporte la démonstration

Il est évident que la démonstration introduit de nouveaux critères de rigueur. Mais ce qui est encore plus intéressant, c'est qu'elle réduit la pression sur la sincérité. En effet, les démonstrations sont publiques, accessibles à tous ceux qui peuvent les comprendre. Thalès a fait une nouvelle démonstration, mais ses collègues doivent être en mesure de la vérifier eux-mêmes ; sinon, ce n'est pas une véritable démonstration. L'une des conditions de la vérité, la sincérité, est ainsi remplacée par l'évidence, l'évidence en soi. Ici, je ne fais pas référence à l'évidence des postulats, mais à l'évidence des démonstrations qui sont synoptiques. À l'inverse, les calculs longs n'ont pas cette forme d'évidence en soi. Il faut répéter les calculs, ou faire appel à plusieurs personnes pour effectuer le même calcul, ou encore recourir à des techniques comme la comptabilité en partie double, brillante invention du XVI^e siècle.

Conclusion

En somme, la démonstration mathématique représente bien plus qu'un simple processus de calcul ; elle incarne un langage commun fondé sur la rigueur et la transparence, permettant de faire émerger la vérité de manière publique et vérifiable. Si les calculs élémentaires, bien qu'essentiels, se limitent souvent à des opérations mécaniques sans prétention de vérité absolue, la démonstration, par sa nature synoptique et accessible, établit des critères d'exactitude plus profonds, débarrassés de la subjectivité. À travers l'évolution de la pensée mathématique, des premiers algorithmes de l'Antiquité jusqu'aux démonstrations modernes, le concept de vérité a pris une forme plus collective, faisant de la démonstration un outil non seulement pour connaître, mais pour communiquer et partager cette connaissance. Ainsi, l'histoire des mathématiques témoigne d'une quête incessante de clarté, de certitude et de partage, dont les fondations restent fermement ancrées dans l'idée que la vérité n'est jamais isolée, mais se construit toujours dans une relation ouverte et vérifiable.